Journal of Pure and Applied Algebra 87 (1993) 221–235
North-Holland

Les groupes, les hypergroupes et l'énigme des Murngin

The Murngin case

Labib Haddad et Yves Sureau

Département Mathématiques Pures, Université Blaise Pascal, 63177 Aubière Cedex, France

Communiqué par M.-F. Roy
Reçu le 5 juin 1992

Abstract

Haddad, L. et Y. Sureau, Les groupes, les hypergroupes et l'énigme des Murngin – The Murngin case, Journal of Pure and Applied Algebra 87 (1993) 221–235.

This is a contribution to the algebraic study of an Australian kinship system known as the 'Murngin system'. It is shown how the introduction of hypergroups and semi-direct products of groups can shed new light on some aspects of this particular system and further enhance the abstract theory of kinship.

Introduction

Claude Lévi-Strauss, en 1949, présente le système Murngin et pose le problème qu'il soulève au Chapitre XII (pages 216–246) de son livre [8]. Il s'agit du système de parenté d'un clan, d'une tribu, d'aborigènes vivant en Terre d'Arnhem dans le nord de l'Australie. Plus loin, dans ce même livre, au Chapitre XIV, dans un 'Appendice à la première partie' (pages 278–287), on trouve quelques pages écrites par André Weil 'à la prière de C. Lévi-Strauss' [12]. André Weil y soumet 'au calcul algébrique' les lois de mariage des Murngin et donne une solution au problème posé en faisant usage de la théorie mathématiques des *groupes*.

Nous nous proposons de montrer, ci-dessous, comment les *hypergroupes* et les produits semi-directs de groupes interviennent dans ce problème et permettent d'aller plus avant.

Avant d'entrer dans le vif du sujet, il convient de dire que ce problème des Murngin a fait couler beaucoup d'encre. Depuis la parution du texte d'André

Correspondance à: L. Haddad, Département Mathématiques Pures, Université Blaise Pascal, Complexe Scientifique des Cézeaux, 63177 Aubière Cedex, France.

Weil, aux ethnologues se sont joints les mathématiciens, en nombre. (A titre d'exemples, nous citrons [5, 9, 2, 4]). Nous citons encore un des derniers articles parus, dû à une mathématicienne, Gisèle De Meur, 'Une structure pour les Murngin' [3].

Description sommaire du système MURNGIN

La société MURNGIN se compose de huit *sous-sections* (au sens des ethnologues). On dira ici huit *classes* (à la manière des mathématiciens, voir notamment [2]). Pour raison de commodité, on commencera par désigner ces huit classes par les chiffres de 1 à 8. La société est soumise à des règles de mariage et de filiation dont voici les deux premières:

- La classe d'un individu est entièrement (et uniquement) déterminée par celle de sa mère (quelle sagesse!).
- Une femme ne peut prendre époux que dans deux classes, ces deux classes étant déterminées par sa propre classe. Et il en va de même pour un homme dans le choix d'une épouse (belle symétrie!).

Le système MURNGIN se différencie des systèmes australiens classiques (KARIERA, ARANDA) en ceci que la règle de mariage n'est pas 'univoque' pour les Murngin. Il y a deux types de mariage auxquels Lévi-Strauss a donné les noms de *mariage normal* et *mariage optionnel* (afin de rendre les mots anglais de *regular* et de *alternate*). Ce qui pose un problème c'est l'usage que font les Murngin de ces deux types de mariage. Les font-ils alterner, comme certains ont pu le dire? Y a-t-il une règle implicite non encore élucidée? Telle est la question.

Mariage normal ou mariage optionnel, dans l'un ou l'autre cas les ascendants maternels et les ascendants paternels forment un *cycle* (au sens mathématique de la théorie des permutations, et non pas au sens de l'ethnologie, bien entendu) un cycle d'ordre 4. Ainsi, en particulier, la grand-mère maternelle de la grand-mère maternelle d'un individu est dans la même classe que cet individu.

Voici la description de ces cycles.

Cycles matrilinéaires.

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & 8 \arrow[d] & 3 \arrow[r] & 5 \arrow[d] \\
7 \arrow[u] & 2 \arrow[l] & 6 \arrow[u] & 4 \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

On lit, par exemple, la mère d'un individu de la classe 1 est dans la classe 8, elle a elle-même sa mère en classe 2.

Cycles patrilinéaires.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & 3 \arrow[d, dash] & 5 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & 7 \arrow[d, dash] \\
4 \arrow[r, dash] & 2 & 8 \arrow[r, dash] & 6
\end{tikzcd}$$

Les cycles 'normaux' se lisent dans le sens des aiguilles d'une montre; les cycles 'optionnels' dans le sens contraire.

Remarques. On observe que, dans les cycles optionnels aussi bien que dans les normaux, le grand-père paternel et la grand-mère maternelle d'un même individu sont dans la même classe.

Ainsi, en désignant par m (respectivement par p) la fonction *mère* (respectivement *père*) on aura $m^2 = p^2$.

De même, on observe que la grand-mère paternelle et le grand-père maternel sont toujours dans la même classe, autrement dit on a $mp = pm$.

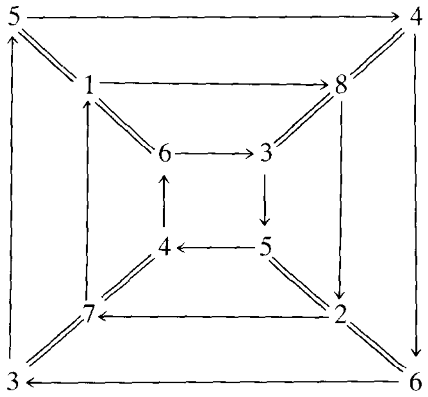
Groupes. Dans chacun des cas, normal ou optionnel (séparément), les permutations m et p qui agissent sur les huit classes, engendrent un groupe de permutation (groupe des *termes de parenté* selon l'appellation de Courrège [2]). Les deux groupes sont isomorphes et ont une *présentation* commune que voici:

$$G = \langle m, p \mid |p| = 4 = |m|, mp = pm, p^2 = m^2 \rangle .$$

C'est un groupe isomorphe au groupe additif à huit éléments suivant

$$\mathbb{Z}/(4) \times \mathbb{Z}/(2) \quad \text{avec } m = (1, 0),\ p = (1, 1) .$$

Diagramme général. Le diagramme suivant rend compte de l'ensemble du système Murngin:



Les mariages normaux se font entre le carré médian et le carré intérieur; les mariages optionnels entre le médian et l'extérieur. Les flèches représentent les cycles matrilinéaires.

On lit, par exemple, qu'un individu (homme ou femme) de la classe 1 épouse dans la classe 6 (en mariage normal) ou dans la classe 5 (mariage optionnel). Sa belle-mère sera dans la classe 3 dans le premier cas, dans la classe 4 dans le second cas.

De même, son beau-père sera dans la classe 8 ou 7 dans le premier cas, dans la classe 7 ou 8 dans le second cas, selon que ses beaux-parents ont contracté un mariage normal ou optionnel.

On peut aussi remarquer qu'un individu choisit son conjoint dans l'une des deux classes possibles pour son grand-père maternel ou (c'est la même chose) sa grand-mère paternelle.

Mariages consécutifs

Pour chaque individu, sa propre classe, la classe de la belle-mère optionnelle de sa belle-mère normale, ainsi que la classe de la belle-mère normale de sa belle-mère optionnelle coïncident toutes trois.

D'autre part, la belle-mère normale de la belle-mère normale d'un individu est toujours dans la même classe que la belle-mère optionnelle de sa belle-mère optionnelle.

Passer du mariage optionnel au mariage normal (ou vice versa) fait décaler le cycle des parents de deux générations.

En associant 0 au mariage normal et 1 au mariage optionnel, on voit que le résultat de la succession de ces types de mariage obéit à la loi de composition du groupe additif $\mathbb{Z}/(2)$.

Revêtement universel

Reprenons le groupe $G = \mathbb{Z}/(4) \times \mathbb{Z}/(2)$ et considérons le produit semi-direct suivant

$$L = G \times_s \mathbb{Z}/(2) \quad \text{où } s(0) = \mathrm{id}_G \text{ et } s(1)(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{a} + \overline{2b}, \bar{b}) .$$

Bien entendu, $s(1)$ est ici un automorphisme d'ordre 2 du groupe G, et le groupe L opère sur l'ensemble des huit classes de la société Murngin pour donner les lois et règles de parenté dans tous les cas, qu'il s'agisse de mariages normaux ou optionnels, comme on le verra plus loin. L'opération s est, en quelque sorte, la fonction de choix du mariage.

Ce groupe L possède 16 éléments et il n'est pas commutatif.

Disons que c'est une sorte de 'revêtement universel' pour la structure Murngin. On le retrouve (non explicité) dans l'article [12] de Weil (au bas de la page 283, les deux formules à la 3ème et 4ème lignes du bas, où l'on fait $q = 0$ et où le paramètre p est autorisé à prendre l'une ou l'autre des valeurs 0 ou 1) sans qu'il y soit dit explicitement qu'il s'agit du produit semi-direct!

Le groupe L permet de donner plusieurs descriptions de la société Murngin. En particulier, il permet de décrire une société 'normale', comme ci-dessus, où tous les mariages seraient normaux. De même, une société 'optionnelle'. Il permet également de retrouver la description de Weil (et celle de Courrège [2], viz §3) où les types de mariages alternent suivant la règle que voici: une fille suit la formule de ses parents ($q = 0$), un fils suit la formule opposée de ses parents ($p = 1$).

Amalgame

On ne connait pas le fonctionnement réel et précis du système Murngin.

Une manière 'simple' de voir les choses est de considérer 'globalement' les divers choix possibles pour chaque mariage. En l'absence d'une règle 'univoque' recourons au 'multivoque'. Considérons *l'hypergroupe* quotient L/g où g est le sous-groupe non-invariant de L, $g = (0, 0) \times_s \mathbb{Z}/(2)$. C'est un 'hypergroupe de classes'. Désignons-le par H et appelons-le *l'hypergroupe Murngin.*

Variante

On peut également construire l'hypergroupe Murngin d'une manière différente en introduisant une partition convenable du groupe G en six classes d'équivalence (à ne pas confondre avec des classes de la société)

(1) $\mathrm{cl}(m^i) = \{m^i\}$, $i = 1,2,3,4$,

(2) $\mathrm{cl}(p) = \mathrm{cl}(p^3) = \{p, p^3\}$,

(3) $\mathrm{cl}(mp) = \mathrm{cl}(mp^3) = \{mp, mp^3\}$,

(4) $\mathrm{cl}(p^2) = \mathrm{cl}(m^2) = \{p^2\} = \{m^2\}$.

Cette partition tient compte des divers cas possibles, en observant ceci:

(i) La classe de la mère est déterminée de manière univoque.

(ii) Si p désigne la fonction 'père normal' (resp. 'père optionnel') alors p^3 désigne la fonction 'père optionnel' (resp. 'père normal').

(iii) Les fonctions mp et mp^3 correspondent aux deux mariages possibles: normal et optionnel (que l'on 'amalgame').

La partition étant définie, on munit alors G d'une loi de composition multivoque (hyperproduit ou 'hyperloi') comme suit:

$$a * b = a\mathrm{cl}(b)\,.$$

Table 1

$\cdot$	e	m	m^2	m^3	p	p^3	mp	mp^3
e	e	m	m^2	m^3	p, p^3	p, p^3	mp, mp^3	mp, mp^3
m	m	m^2	m^3	e	mp, mp^3	mp, mp^3	p, p^3	p, p^3
m^2	m^2	m^3	e	m	p, p^3	p, p^3	mp, mp^3	mp, mp^3
m^3	m^3	e	m	m^2	mp, mp^3	mp, mp^3	p, p^3	p, p^3
p	p	mp	p^3	mp^3	e, m^2	e, m^2	m, m^3	m, m^3
p^3	p^3	mp^3	p	mp	e, m^2	e, m^2	m, m^3	m, m^3
mp	mp	p^3	mp^3	p	m, m^3	m, m^3	e, m^2	e, m^2
mp^3	mp^3	p	mp	p^3	m, m^3	m, m^3	e, m^2	e, m^2

Le terme a étant donné, cela représente l'ensemble des termes de parenté du type ab pour les deux mariages possibles.

On obitent ainsi sur G une structure d'hypergroupe isomorphe à celle de l'hypergroupe Murngin.

Ce procédé de construction est connu sous le nom de 'construction de Utumi' (voir, par exemple, [7]). L'hypergroupe que l'on obtient est un *cogroupe* à huit éléments. La Table 1 ci-jointe en donne l'hyperloi.

L'hypergroupe Murngin réduit

On peut encore faire un pas de plus dans la 'globalisation' ou l'amalgame.

On désigne par R la relation d'équivalence associée à la partition définie au paragraphe précédent. Puis l'on considère l'hypergroupe G/R (quotient de G par la relation R). Il a six éléments. Sa table figure ci-dessous (Table 2). Ce n'est pas un cogroupe. On lui donnera le nom *d'hypergroupe Murngin réduit*. On désignera cet hypergroupe par K.

On décrira plus loin comment ces deux hypergroupes opèrent 'naturellement' sur l'ensemble des classes de la société.

Compléments et commentaires

Au système Murngin sont ainsi associés, d'une maniére 'naturelle', deux groupes et deux hypergroupes. Les deux groupes figurent déjà, dans la littérature,

Table 2

	e	m	m^2	m^3	p	mp
e	e	m	m^2	m^3	p	mp
m	m	m^2	m^3	e	mp	p
m^2	m^2	m^3	e	m	p	mp
m^3	m^3	e	m	m^2	mp	p
p	p	mp	p	mp	e, m^2	m, m^3
mp	mp	p	mp	p	m, m^3	e, m^2

implicitement ou explicitement associés aux Murngin. Les deux hypergroupes le sont ici pour la première fois, à notre connaissance.

(1) On comparera notre analyse à celles d'auteurs précédents, et notamment celles de Weil [12], Courrege [2], et De Meur [3].

(2) Les deux groupes et les deux hypergroupes 'agissent' sur l'ensemble des huit classes de la société Murngin. On peut également les faire agir sur les huit classes 'marquées' ou, ce qui revient au même, sur les 16 types de mariages que comporte l'organisation Murngin.

(3) Le groupe L, 'revêtement universel', possède 16 éléments et n'est pas commutatif, on l'a déjà dit. Il agit d'une manière essentiellement unique.

(4) Le groupe commutatif G d'ordre huit possède trois actions différentes sur les huit classes. En effet, il a un mode d'action *normal*, un mode *optionnel* et un mode *mixte* avec alternance.

(5) L'hypergroupe Murngin H à huit éléments que nous avons introduit, ainsi que l'hypergroupe Murngin réduit K ont chacun une action (multivoque) sur les classes de la société. Ils permettent de décrire 'un' fonctionnement possible, compte-tenu des seules contraintes connues et en l'absence de toute autre hypothèse complémentaire.

(6) Bien entendu, le dernier mot est à l'ethnologie.

(7) Cependant, le mathématicien peut généraliser (avec plaisir et profit).

C'est ce que nous nous proposons de faire, à présent.

Une représentation universelle

On se donne une structure élémentaire de parenté (S, m, p) où S désigne l'ensemble des classes de la société et où m et p désignent respectivement les fonctions 'mère' et 'père'.

Pour tenir compte de toutes les possibilités de mariages, comme dans le cas des MURNGIN, nous proposons la représentation 'universelle' suivante du fonctionnement de la structure.

On désigne par G le groupe des termes de parenté de cette structure, autrement dit le sous-groupe des permutations de l'ensemble S engendré par les deux permutations m et p.

On fait alors agir le groupe G à droite sur S:

$$S \times G \to S\,, \qquad (x, a) \mapsto x.a\,.$$

Cela exprime le fait suivant: le parent ayant le lien de parenté a avec un individu de la classe x se trouve dans la classe $x.a$.

On se donne, à présent, un groupe g quelconque d'automorphismes du groupe G (éventuellement, le groupe de tous ces automorphismes!). A chaque élément f du groupe g correspond une structure élémentaire de parenté que nous désignons par $\mathbf{S}(f) = (S, f(m), f(p))$ et qui est *isomorphe* à la structure donnée (S, m, p). C'est ainsi que, dans le cas des MURNGIN, on passe du système normal au système optionnel à l'aide de l'automorphisme f de G défini par $f(m) = m$ et $f(p) = p^{-1}$.

D'une manière générale, si f et h sont deux éléments du groupe g, on leur associe les deux structures $\mathbf{S}(f) = (S, f(m), f(p))$ et $\mathbf{S}(h) = (S, h(m), h(p))$. Si l'on remarque alors que, pour chaque élément a de G, on a $h(a) = f(f^{-1}(h(a)))$, en posant $k = f^{-1}h$ on voit que $\mathbf{S}(fk) = \mathbf{S}(h)$ de sorte que le groupe g opère à droite sur l'ensemble $\mathbf{S} = \{\mathbf{S}(f) \mid f \in g\}$ de toutes ces structures: cette opération étant $\mathbf{S}(f).k = \mathbf{S}(fk)$.

Ainsi on passe de $\mathbf{S}(f)$ à $\mathbf{S}(h)$ par l'opération d'un élément de g, à savoir $k = f^{-1}h$.

Mais alors, il convient de repérer, pour chacune des classes x de S, la structure particulière dans laquelle on veut la considérer. Le plus naturel est d'utiliser pour cela l'ensemble $S \times g$:

ici, le couple (x, f) représente la classe x du point de vue de la structure $\mathbf{S}(f)$.

De même, lors d'une recherche de parenté du type $a \in G$, convient-il d'indiquer si les parents désignés sont dans cette structure elle-même ou dans la structure 'modifiée' par un $k \in g$. On aura recours, cette fois, à l'ensemble $G \times g$.

On fait ainsi opérer $G \times g$ à droite sur $S \times g$ comme suit:

$$(x, f).(a, k) = (x.f(a), fk)\,.$$

Cela exprime le fait que le parent $x.f(a)$ ayant le lien de parenté a avec un individu de la classe x considérée dans la structure $\mathbf{S}(f)$ est lui-même considéré dans la structure $\mathbf{S}(fk)$.

Dans ces conditions, on va montrer qu'il convient alors de munir l'ensemble des 'opérateurs' $G \times g$ de la structure de groupe définie comme produit semi-direct de G et g.

En effet, les actions successives de (a, k) suivie de (b, h) sur (x, f) donnent lieu aux écritures suivantes:

$$\begin{aligned}
&((x, f).(a, k)).(b, h)\\
&\quad = (x.f(a), fk).(b, h)\\
&\quad = (x.f(a).fk(b), (fk)h)\\
&\quad = (x.f(a.k(b)), f(kh))\\
&\quad = (x, f).(ak(b), kh)\\
&\quad = (x, f).((a, k)(b, h))
\end{aligned}$$

en ayant posé $(a, k)(b, h) = (ak(b), kh)$.

C'est donc bien comme produit semi-direct que le groupe $G \times g$ agit à droite sur l'ensemble $S \times g$.

Résumons-nous: étant donnés une structure élémentaire de parenté $\mathbf{S}(1) = (S, m, p)$ que l'on pourrait appeler la structure de référence, son groupe G des termes de parenté (engendré par les permutations m et p de l'ensemble S) et un groupe g d'automorphismes du groupe G, la structure la plus générale dont on puisse munir cette société $\mathbf{S}(1)$ peut être représentée par l'action du produit semi-direct $G \times g$ sur l'ensemble $S \times g$ où chaque couple (x, f) de $S \times g$ représente la classe x de S considérée dans la structure $\mathbf{S}(f)$.

Amalgame

Reprenons une structure élémentaire de parenté (S, m, p), son groupe G des termes de parenté, un groupe g d'automorphismes du groupe G exprimant tous les types de mariages admis.

Chaque élément a de G est un opérateur sur S. Il représente un certain lien de parenté dans la structure de référence $\mathbf{S}(1) = (S, m, p)$. Dans la structure 'modifiée' $\mathbf{S}(f) = (S, f(m), f(p))$, ce lien de parenté est obtenu par l'opérateur $f(a)$. Ainsi, dans la mesure où l'on désire rassembler tous les cas admissibles, il faudrait considérer toute la famille $(f(a))_{f \in g}$.

On introduit, ce faisant, la relation d'équivalence suivante R sur G:

$$a\,R\,b \quad \text{veut dire} \quad \text{'il existe } f \in g \text{ tel que } b = f(a)\text{'} .$$

C'est-à-dire que la classe d'équivalence $\mathrm{cl}(a) = \{f(a) \mid f \in g\}$ amalgame tous les liens de parenté représentés par a dans la structure de référence $\mathbf{S}(1)$ et prises dans chacun des types de société possibles.

Par exemple, l'ensemble $\mathrm{cl}(p)$ est formé de toutes les fonctions 'père' prises pour tous les types de mariages admis!

On remarquera de plus que, pour chaque a et b dans G, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{cl}(a\mathrm{cl}(b)) &= \{f(ah(b)) \mid f \text{ et } h \text{ dans } g\} \\ &= \{f(a)(fh(b)) \mid f \text{ et } h \text{ dans } g\} \\ &= \{f(a)k(b) \mid f \text{ et } k \text{ dans } g\} \\ &= \mathrm{cl}(a)\mathrm{cl}(b) . \end{aligned}$$

De même, on a $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(a)b) = \mathrm{cl}(a)\mathrm{cl}(b)$.

Ainsi, le produit de deux classes d'équivalence est toujours réunion de classes d'équivalences. De sorte que le quotient G/R est muni de la structure d'hypergroupe induite par celle du groupe G.

Disons encore que le produit $\mathrm{cl}(a)\mathrm{cl}(b)$ représente donc tous les types possibles (i.e. permis, admis) de lien de parenté ab pour l'ensemble de toutes les structures 'modifiées' $\mathbf{S}(f)$ pour f parcourant g.

On appellera l'hypergroupe G/R 'l'hypergroupe Murngin réduit'.

Considérons, d'autre part, l'application suivant:

$$G/R \to \{1\} \times g \backslash G \times g \backslash \{1\} \times g ,$$
$$\mathrm{cl}_R(a) \mapsto \mathrm{cl}_g(a, 1) ,$$

où $\mathrm{cl}_R(a)$ est la classe d'équivalence de a modulo R et où $\mathrm{cl}_g(a, 1)$ est la double classe de $(a, 1)$ modulo le sous-groupe $\{1\} \times g$ de $G \times g$. C'est un isomorphisme d'hypergroupes et ces hypergroupes sont, ici, des polygroupes au sens de Comer [1].

Voici un second problème que l'on peut encore traiter à l'aide d'une hyperstructure qui sera définie, cette fois, sur G lui-même.

Si le lien de parenté a est connu dans la structure de référence et si l'on veut connaître les diverses possibilités de lien ab, on fera agir $a\mathrm{cl}(b)$ sur S. En d'autres termes, on utilisera sur G l'hyperproduit $a * b = a\mathrm{cl}(b)$.

Comme, de plus, la classe d'équivalence de l'élément unité 1 de G est réduite à ce seul élément, l'hyperstructure $(G, *)$ est un hypergroupe que nous appellerons 'l'hypergroupe Murngin' de $\mathbf{S}(1)$. C'est même un cogroupe de type UTUMI, voir [7].

On vérifie que l'application

$$G \times g \backslash \{1\} \times g \to (G, *) ,$$
$$(a, f)\{1\} \times g = (a, g) \mapsto a$$

est un isomorphisme de cogroupes. Ainsi $(G, *)$ est un D-hypergroupe, voir [6].

Les deux hypergroupes G/R et $(G, *)$ opèrent sur l'ensemble S des classes de la société lui-même puisque les repérages dans les différentes structures $\mathbf{S}(f)$ n'a alors plus de sens. Pour le voir, il suffit d'examiner l'action à droite de $\mathrm{cl}(a)$ sur un élément x de S.

On pose naturellement

$$x.\mathrm{cl}(a) = \{x.b \mid b \in \mathrm{cl}(a)\} .$$

On vérifie ensuite que l'on a bien

$$x.(\mathrm{cl}(a)\mathrm{cl}(b)) = (x.\mathrm{cl}(a)).\mathrm{cl}(b) .$$

Ainsi, aussi bien G/R que $(G, *)$ opèrent-ils à droite sur S.

Le revêtement universel

On va franchir encore un pas dans la représentation.

On reprend une structure élémentaire de parenté quelconque (S, m, p) et son groupe G des termes de parenté. On lui associe alors une structure 'abstraite' (G, m, p) dont G est l'ensemble des classes de la société et où les fonctions 'mère' et 'père', m et p, agissent à droite sur G:

$$m : G \to G\,, \qquad a \mapsto am\,,$$

$$p : G \to G\,, \qquad a \mapsto ap\,.$$

Le groupe des termes de parenté de cette dernière structure n'est autre que le groupe G lui-même!

Puis l'on choisit un élément 'distingué' quelconque 1 de S et l'on définit l'application $i : G \to S$ par $i(a) = 1.a$. On vérifie que l'on a alors $i(a).b = i(ab)$ quels que soient les termes a et b dans G. On obtient ainsi un morphisme i de la structure abstraite (G, m, p) dans la structure de départ (S, m, p).

Lorsque l'application i est *surjective* c'est que le groupe G opère transitivement sur l'ensemble S des classes de la société. C'est bien le cas le plus 'naturel' car, sinon, on aurait affaire non pas à une véritable 'société' mais à des sociétés 'disjointes' formées des diverses orbites de l'action de G sur S.

Lorsque l'application i est de plus injective, c'est le cas des Murngin, les deux structures sont manifestement isomorphes.

On peut aller plus loin. Si l'on s'est donné, en outre, un groupe g d'automorphismes de G, on peut alors considérer l'application j de $G \times g$ dans $S \times g$ définie par $j(a, f) = (i(a), f)$. On vérifie qu'on a bien $j(a, f).(b, h) = j((a, f).(b, h))$ de sorte que la représentation universelle de la structure abstraite 'couvre' (revêt) la représentation universelle de la structure donnée. Les calculs se font ainsi directement dans le produit semidirect $G \times g$ qui opère sur lui-même, à droite! On peut ensuite 'redescendre' dans $S \times g$ par l'intermédiaire de l'application j.

Retour aux Murngin

Dans le cas des MURNGIN, on a $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ et le groupe G est isomorphe au produit direct $\mathbb{Z}/(4) \times \mathbb{Z}/(2)$.

On pose $e = (0, 0)$, $m = (1, 0)$, $p = (1, 1)$. Puis on identifie l'ensemble S des classes de la société à l'ensemble G à l'aide de la bijection i ainsi définie

G	e	m	m^2	m^3	p	mp	m^2p	m^3p
S	1	8	2	7	3	5	4	6

qui se lit aussi comme suit

S	1	2	3	4	5	6	7	8
G	e	m^2	p	p^3	mp	m^3p	m^3	m

L'action du groupe G sur S se traduit alors par la 'multiplication' à droite dans G. Voir ci-dessous les cycles matrilinéaires et patrilinéaires.

Le groupe G est engendré par m et p. On a

$$m^4 = p^4 = e\,, \qquad m^2 = p^2\,, \qquad mp = pm\,,$$
$$p^3 = m^2p\,, \qquad mp^2 = m^3\,, \qquad mp^3 = m^3p\,.$$

Pour le *mariage normal* la structure est (S, m, p). Pour le *mariage optionnel* la structure est (S, m, p^{-1}). On passe de l'une à l'autre par l'automorphisme $t = s(1)$ du groupe G défini par

$$t(m) = m\,, \quad t(p) = p^{-1} \quad \text{soit} \quad t(\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{a} + \overline{2b}, \overline{b})\,.$$

Le groupe g est constitué de $I = \mathrm{id}_G$ et de t; il est isomorphe à $\mathbb{Z}/(2)$. Pour les structures normale et optionnelle, on retrouve les cycles des premières pages.

Cycles matrilinéaries.

$$\begin{tikzcd} 1 = e \arrow[r] & m = 8 \arrow[d] \\ 7 = m^3 \arrow[u] & m^2 = 2 \arrow[l] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 3 = p \arrow[r] & pm = mp = 5 \arrow[d] \\ 6 = m^3p = pm^3 \arrow[u] & pm^2 = m^2p = 4 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Cycles patrilinéaires.

$$\begin{tikzcd} 1 = e \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & p = 3 \arrow[d, dash] \\ 4 = p^3 \arrow[r, dash] & p^2 = 2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 8 = m \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & mp = 5 \arrow[d, dash] \\ 6 = mp^3 \arrow[r, dash] & mp^2 = 7 \end{tikzcd}$$

La structure normale (S, m, p). On fait agir $G \times \{I\}$ sur $S \times \{I\}$ avec pour fonction mère $m_n = (m, I)$ et pour fonction père $p_n = (p, I)$.

La structure optionnelle $(S, t(m), t(p)) = (S, m, p^{-1})$. On fait agir $G \times \{I\}$ sur $S \times \{t\}$ avec les mêmes fonctions mère et père m_n et p_n respectivement.

On peut aussi faire agir $G \times \{I\}$ sur $S \times \{I\}$ avec, cette fois, pour fonction mère $m_o = (m, I) = m_n$ et pour fonction père $p_o = (t(p), I) = (p^{-1}, I)$.

Les structures mixtes avec alternance

On fait agir globalement le groupe $L = G \times g$ sur $S \times g$. Pour la fonction mère, on a le choix entre deux possibilités: (m, I) et (m, t). Pour la fonction père, on a quatre possibilités: (p, I), (p, t), (p^{-1}, I) et (p^{-1}, t). Cela fait, au total, huit possibilités qui vont par paires:

(1) $M = (m, I)$ et $P = (p, I)$,
(1-bis) $M = (m, I)$ et $P = (p^{-1}, I)$,
(2) $M = (m, I)$ et $P = (p, t)$,
(2-bis) $M = (m, I)$ et $P = (p^{-1}, t)$,
(3) $M = (m, t)$ et $P = (p, I)$,
(3-bis) $M = (m, t)$ et $P = (p^{-1}, I)$,
(4) $M = (m, t)$ et $P = (p, t)$,
(4-bis) $M = (m, t)$ et $P = (p^{-1}, t)$.

On passe d'un numéro donné au numéro bis correspondant par la conjugaison du groupe L à l'aide de l'élément $c = (e, t)$. Ainsi, par exemple, du (3) on passe au (3-bis) par

$$c^{-1}(m, t)c = (e, t)(m, t)(e, t) = (m, t) \,,$$
$$c^{-1}(p, I)c = (e, t)(p, I)(e, t) = (p^{-1}, I) \,.$$

Chacune des quatre paires est constituée de deux actions isomorphes.

Il suffira d'examiner les quatre choix (1), (2), (3), (4).

Dans le premier cas, les enfants contractent le même type de mariage que leurs parents. Dans le (2), les filles font comme leurs parents et les fils font le contraire! Ce choix correspond à la description de Weil rappelée ci-dessus. Dans le cas (3), ce sont les fils qui imitent les parents, les filles faisant le contraire. Enfin dans le (4), les filles et les fils contractent le type de mariage différent de celui des parents.

Voici, dans chacun des quatre cas, une description sommaire, par relations, du groupe des termes de parenté, autrement dit le sous-groupe de L engendré par M et P et que nous désignons par U.

(1) $|M| = |P| = 4$, $M^2 = P^2$, $MP = PM$. Le groupe U est isomorphe à G, isomorphe à $\mathbb{Z}/(4) \times \mathbb{Z}/(2)$.
(2) $|M| = 4$, $|P| = 2$, $MP = PM$. Le groupe U est à nouveau isomorphe à G.
(3) $|M| = |P| = 4$, $MP = P^{-1}M$. Le groupe U est le groupe quaternionien.
(4) $|M| = 4$, $|P| = 2$, $MP = PM^{-1}$. Le groupe U est le groupe diédral D_4.

Il convient enfin de remarquer ceci: dans le cas du (1), le groupe U, isomorphe au groupe G, opérant sur $S \times g$ possède deux orbites ayant huit éléments chacune et correspondant, respectivement, à la structure normale et à la structure optionnelle. De même, dans le cas du (2), l'action du groupe U sur $S \times g$ possède deux orbites qui, toutes deux, correspondent à une structure mixte. Il a déjà été question de ces trois modes d'action du groupe G, plus haut, dans 'Compléments et commentaires'.

De même, aussi bien dans le cas (3) que dans le cas (4), le groupe U (quaternionien ou diédral) agissant sur L, possède également deux orbites ayant huit éléments chacune.

Que font, que faisaient réellement les Murngin? Cela ne relève plus, directement, du domaine mathématique!

Annexe. Une représentation binaire de la société Murngin

Sur le produit cartésien $A = \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$, la loi interne définie, pour tous a, b, α et β de $\mathbb{Z}/(2)$, par $(a, b)(\alpha, \beta) = (a + \alpha + b\beta,\ b + \beta)$ lui confère une structure de groupe commutatif isomorphe à $\mathbb{Z}/(4)$; on désignera ce groupe par $\mathbb{Z}/(2) \bullet \mathbb{Z}/(2)$.

Entre $\mathbb{Z}/(4)$ et $\mathbb{Z}/(2) \bullet \mathbb{Z}/(2)$ on a deux isomorphismes possibles:

$$\phi' \quad \text{tel que} \quad \phi'(1) = (1, 1)\,,$$
$$\phi'' \quad \text{tel que} \quad \phi''(1) = (0, 1)\,,$$

et l'on a

$$\phi'(2) = \phi''(2) = (1, 0)\,, \qquad \phi'(1) = \phi''(3) = (1, 1)\,,$$
$$\phi'(3) = \phi''(1) = (0, 1)\,, \qquad \phi'(0) = \phi''(0) = (0, 0)\,.$$

Dans un cas, comme dans l'autre,

$$L = (\mathbb{Z}/(4) \times \mathbb{Z}/(2)) \times_s \mathbb{Z}/(2)$$

est isomorphe à

$$M = [(\mathbb{Z}/(2) \bullet \mathbb{Z}/(2)) \times \mathbb{Z}/(2)] \times_s \mathbb{Z}/(2)\,.$$

Le composé des deux quadruplets (a, b, v, w) et (a', b', v', w') de M est

$$(a, b, v, w)(a', b', v', w') = (a + a' + bb' + wv',\, b + b',\, v + v',\, w + w')\,.$$

Enfin, si l'on note θ' l'isomorphisme entre L et M défini à partir de ϕ' et θ'' celui défini à partir de ϕ'', en posant $\alpha = (0, 0, 1)$, on a:

$$\theta'(m) = \theta'(1,0,0) = (1,1,0,0)\,,$$

$$\theta'(p) = \theta'(1,1,0) = (1,1,1,0)\,,$$

$$\theta'(\alpha) = \theta'(0,0,1) = (0,0,0,1)\,,$$

$$\theta''(m) = \theta''(1,0,0) = (0,1,0,0)\,,$$

$$\theta''(p) = \theta''(1,1,0) = (0,1,1,0)\,,$$

$$\theta''(\alpha) = \theta''(0,0,1) = (0,0,0,1)\,.$$

Références

[1] S.D. Comer, Polygroups derived from cogroups, J. Algebra 89 (1984) 397–405.

[2] P. Courrège, Un modèle mathématique des structures élémentaires de parenté, L'Homme 5 (1965); rééd. dans: Anthropologie et Calcul, Textes choisis et présentés par P. Richard et R. Jaulin, Collection 10/18 (U.G.E., Paris, 1971) 126–181. Une version en anglais est également parue: A mathematical model of the structure of kinship, trans. D. Read, in: P. Ballanoff, ed., Genetics and Social Structure (Stroudsberg, Pennsylvania, Dowden, Hutchinson & Ross, 1974) 238–338.

[3] G. De Meur, Une structure pour les Murngin, in: G. De Meur, ed., New Trends in Mathematical Antropology, International Library of Anthropology (Routledge & Kegan Paul, London, 1986) 125–137.

[4] A. Fuchs, Les structures de parenté; traitement mathématique, Revue Européenne des Sciences Sociales et Cahiers Vilfredo Pareto 19 (1981) 161–182.

[5] G.Th. Guilbaud, Système parental et matrimonial au Nord Ambrym, (Exposé, et discussions comportant la participation de M. Claude Lévi-Strauss), J. Société Océanistes 26 (1970) 9–32. (L'exposé a eu lieu le 19 janvier 1961, les discussions le 19 et le 27 janvier 1961.)

[6] L. Haddad et Y. Sureau, Les cogroupes et les D-hypergroupes, J. Algebra 118 (1988) 468–476.

[7] L. Haddad et Y. Sureau, Les cogroupes et la construction de Utumi, Pacific J. Math. 145 (1990) 17–58.

[8] C. Lévi-Strauss, Les Structures Élémentaires de la Parenté (P.U.F., Paris, 1949); la deuxième édition est parue en 1967, Paris-La-Haye, Mouton. Une version en anglais est également parue dans: R. Needham, ed. The Elementary Structures of Kinship (Beacon Press, Boston, 1969).

[9] P. Samuel, Groupes de permutations et règles de mariage dans certaines sociétés primitives (non publié), ENS. JF, Répétitions de 1 ère année, Décembre 1961, 6 feuillets dactylographiés.

[10] Y. Sureau, Contribution à la théorie des hypergroupes et hypergroupes opérant transitivement sur un ensemble, Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Clermont II, 1980.

[11] Y. Sureau, Hypergroupes de type C (Conférence de Taormina, 1983), Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 40 (1991) 421–437.

[12] A. Weil, Sur l'étude algébrique de certains types de lois de mariage (Système Murngin), in: C. Lévi-Strauss, Les Structures Elémentaires de la Parenté (P.U.F., Paris, 1949) 278–285.